

KÖKLÜ SAYILAR

n , 1 den büyük bir sayma sayısı olmak üzere,
 $x^n = a$ denklemini sağlayan x sayısına a n'inci dereceden kökü denir.

$x^n = a$ ise, $x = \sqrt[n]{a}$ dir.

Özellik 1:

$x = \sqrt[n]{a}$ ifadesinin bir reel sayı belirtebilmesi için iki durum söz konusudur.

- I. n tek ise, a herhangi bir reel sayı olabilir. Bu durumda $x = \sqrt[n]{a}$ ifadesi bir reel sayı belirtir.
- II. n çift ise, $a \geq 0$ olursa $x = \sqrt[n]{a}$ ifadesi bir reel sayı belirtir.
 n çift ise, $a < 0$ olursa $x = \sqrt[n]{a}$ bir reel sayı belirtmez.

Örnek:

$$\sqrt{21-7x}$$

ifadesinin bir reel sayı belirtmesini sağlayan x doğal sayıların toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Özellik 2:

Kökün derecesi ne olursa olsun (tek veya çift), kökün içi sıfır ise, kökün sonucu sıfırdır.

Örnek:

$$\sqrt{x-4} + \sqrt[4]{2x+y-11} = 0$$

olduğuna göre, $x+y$ toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 10

Özellik 3:

Köklü sayılar üslü sayı biçiminde yazılabilir.

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

O halde tersi düşünülürse, bir üslü sayının üssü kesirli ise, o sayı köklü sayı biçiminde yazılabilir.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\sqrt{3^5} = \sqrt[2]{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$$

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

Örnek: (2006 KPSS)

$$(3^x)^5 = 9\sqrt{3}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

Örnek:

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[9]{64}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $2 \cdot \sqrt[3]{2}$ D) 2 E) 4

Özellik 4:

$a = \sqrt[n]{x^n}$ ifadesinde,

- I. n tek sayı ise, $\sqrt[n]{x^n} = x$ tir.
- II. n çift sayı ise, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ tir

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2$$

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

Örnek:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt{16}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Örnek:

$\alpha < 0 < b$ olmak üzere,

$$\sqrt{b^2} + \sqrt[3]{(-\alpha)^3} + \sqrt{(\alpha - b)^2}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2\alpha - 2b$ B) $2b - 2\alpha$ C) 0
D) -2α E) $-2b$

Özellik 5:

Köklü ifadelerde, kökün içindeki sayının tamamı her zaman kök dışına çıkmayabilir. Böyle durumlarda, çıkan sayı köklü sayı ile çarpılırken, kökün içinde kalan sayı yine aynı kökle isimlendirilir.

x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \cdot \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$$

KÖKLÜ SAYILARDA DÖRT İŞLEM

1. Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Köklü sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri yapabilmek için, kök derecelerinin ve kök içlerinin aynı olması gerekir. Burada; köklü ifadelerin katsayıları toplanır veya çıkarılır. Bulunan değer, ortak olan köklü ifadenin katsayısı olarak yazılır.

$$a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} - c \cdot \sqrt[n]{x} = (a + b - c) \cdot \sqrt[n]{x}$$

$$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Örnek: (2005 KPSS)

$$3\sqrt{98} - 2\sqrt{72} = x\sqrt{18}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Örnek: (2006 KPSS)

$\sqrt{3}$ sayısının yaklaşık değeri 1,7 dir.

$$\sqrt{243} - \sqrt{27}$$

ifadesinin yaklaşık değeri kaçtır?

- A) 3,4 B) 5,1 C) 6,8 D) 8,5 E) 10,2

2. Çarpma İşlemi

Köklü ifadelerde çarpma işlemi yapabilmek için, kök derecelerinin aynı olması gerekir. Burada; kökün içindeki sayılar çarpılır ve bulunan değer, aynı dereceden kökün içine yazılır.

x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{100}$$

Örnek:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{9}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 6 B) $3 \cdot \sqrt[3]{3}$ C) $4 \cdot \sqrt[3]{2}$ D) 8 E) 9

3. Bölme İşlemi

Köklü ifadelerde bölme işlemi yapabilmek için, kök derecelerinin aynı olması gerekir. Burada; kökün içindeki sayılar bölünür ve bulunan değer, aynı dereceden kökün içine yazılır.

x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{1,6}$$

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2,25}$$

Örnek: (2006 KPSS)

$$\frac{\sqrt{0,9} - \sqrt{0,4}}{\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{0,2}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 10 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{10}$

Örnek: (2004 KPSS)

$$\frac{\sqrt{0,81} + \sqrt{0,64}}{\sqrt{0,25} + \sqrt{0,04}} - \frac{\sqrt{0,09}}{\sqrt{0,49}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Özellik 6:

Kök dereceleri aynı olmayan köklü ifadelerde çarpma veya bölme yapabilmek için, kök dereceleri OKEKlerinde eşitlenir. Burada kök derecesi hangi sayı ile çarpılırsa, kökün içindeki sayının kuvveti de aynı sayı ile çarpılır.

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[k \cdot n]{x^{k \cdot m}} \quad (k \in \mathbb{R}^+)$$

Örnek:

$$a = \sqrt[3]{3}, \quad b = \sqrt[4]{5}, \quad c = \sqrt{2}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $b < a < c$
 D) $c < a < b$ E) $c < b < a$

PAYDAYI RASYONEL YAPMA

Kesirli ifadelerde payda köklü bir sayı ise, paydayı kökten kurtarma işlemine paydayı rasyonel yapma, bir başka deyişle eşlenik çarpımı denir.

$$\checkmark \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$$

$$\checkmark \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$$

Örnek:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$$

Örnek:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Örnek:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ B) $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$
 C) $\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$ D) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
 E) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

Özellik 7:

x ve y pozitif reel sayı ve $x > y$ olmak üzere;

$$x + y = a \quad x \cdot y = b \quad \text{olsun.}$$

$$\checkmark \quad \sqrt{\alpha + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\checkmark \quad \sqrt{\alpha - 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Örnek:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3} + 2$

Örnek:

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ B) $\sqrt{3} + 1$ C) $\sqrt{5} + 1$
D) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ E) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

Örnek:

$$\sqrt{6 - \sqrt{35}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{2}$ C) $\sqrt{14} - \sqrt{10}$
D) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{2}$

Özellik 8:

iç içe geçmiş köklerde kural,

✓ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ tir.

✓ $\sqrt[m]{x \cdot \sqrt[n]{y}} = \sqrt[m \cdot n]{x^n \cdot y}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = {}^{2.3}\sqrt{2} = \sqrt[6]{2}$$

$$\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{3}} = {}^{3.2}\sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt[6]{75}$$

Özellik 9:

$x = \alpha \cdot (\alpha + 1)$ olmak üzere;

✓ $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = (\alpha + 1)$

✓ $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \dots}}} = \alpha$

Örnek:

$20 = 4 \cdot 5$ olduğundan

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}} = 5$$

$$\sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots}}} = 4$$

Örnekler

1.

$$a\sqrt{2} = a + 1$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) $\sqrt{2} - 1$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
 D) $\sqrt{2} + 1$ E) $2\sqrt{2}$

2.

$$\sqrt{10 + \sqrt{x + 11}} = 4$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) -7 B) -2 C) 5 D) 25 E) 38

3.

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 16}} = 2$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4. (2008 KPSS)

$$\frac{8\sqrt{10} - 30\sqrt{2}}{2\sqrt{40} - 3\sqrt{50}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 5 D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

5.

$\sqrt{108}$ sayısının yaklaşık değerinin hesaplanabilmesi için aşağıdaki sayılardan hangisinin yaklaşık değeri bilinmelidir?

- A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

6.

$$\frac{\sqrt{5^{4x+6}}}{\sqrt[3]{125^{x-1}}} = \frac{1}{25^2}$$

ise, x kaçtır?

- A) 8 B) 6 C) -4 D) -6 E) -8

7.

$$\sqrt{499.501 + 1} - \sqrt{43.45 + 1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 436 B) 446 C) 456 D) 466 E) 476

8.

$$\sqrt{(-3)^2} + \sqrt[5]{(-2)^5} - \sqrt[4]{(-2)^4 \cdot 25^2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -15 B) -9 C) 6 D) 9 E) 15

9.

$$\sqrt{\frac{1}{81} + \frac{2}{45} + \frac{1}{25}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{13}{45}$ B) $\frac{14}{45}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{45}$ E) $\frac{1}{5}$

10.

$A = 2x + \sqrt{-x^2 + 6x - 9}$ ifadesi reel bir sayıya eşit ise bu sayı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

11.

$$\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}$$

ise, x + y kaçtır?

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

12.

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) $3\sqrt{2}$

13. (2004 KPSS)

$$(\sqrt{3}-2)^8 \cdot (\sqrt{3}+2)^9$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2 - \sqrt{3}$ B) $\sqrt{3} + 2$ C) $\sqrt{3} - 2$
D) $\sqrt{3} + 1$ E) $1 - \sqrt{3}$

14. (2001 KMS)

$\frac{40}{\sqrt{5}}$ sayısı $\sqrt{5}$ sayısının kaç katıdır?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 20

15.

$$\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

olduğuna göre, a nın b türünden değeri aşağıdakiler-den hangisidir?

- A) $\frac{b+1}{b}$ B) $\frac{b}{b+1}$ C) $\frac{b+1}{b-1}$
D) $\frac{b-1}{b}$ E) $\frac{b}{b-1}$

16.

$$2^a = 3^b$$

olduğuna göre, $4^{\frac{a}{b}} + 27^{\frac{b}{a}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 8 D) 9 E) 17

17.

$$\sqrt[3]{32} + 3 \cdot \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{4000}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $3 \cdot \sqrt[3]{32}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $3 \cdot \sqrt[3]{4}$
D) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ E) $\sqrt[3]{4}$

18.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-4\sqrt{2}$ B) 0 C) $-\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6} - \sqrt{3}$

19.

$$x \sqrt[20]{2^{0,04}} = 200 \sqrt{4}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

20.

$$x = \sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{42 - \dots}}}$$

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$$

olduğuna göre, y kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6